PART2 標本平均の分布

要点 ① 標本平均の期待値，分散，標準偏差

X	X_1	X_2	$\cdots$	X_n	$\overline{X}$
標本 1			$\cdots$		
標本 2					
$\vdots$					

ある母集団から大きさ n の標本を無作為抽出する。この標本の各個体の変量の値を X_1，X_2，……，X_n とする。このとき，これらの平均

$$\overline{X}=\frac{X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n}{n}$$

を「　　　　　」という。X_1，X_2，……，X_n はそれぞれ，標本の抽出によって値が定まる確率変数であるから，標本平均 $\overline{X}$ もまた，標本の抽出によって値が定まる確率変数である。

母平均 m，母分散 σ^2，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出し，この標本の各個体の変量の値を X_1，X_2，……，X_n とする。

この抽出が「　　　　　」の場合，X_1，X_2，……，X_n のそれぞれは，母集団から大きさ 1 の標本を抽出することで得られる確率変数とみなすことができ，それぞれ母集団と同じ確率分布をもつ。よって

$$E(X_1)=E(X_2)=\cdots\cdots=E(X_n)=m,\qquad V(X_1)=V(X_2)=\cdots\cdots=V(X_n)=\sigma^2$$

が成り立つ。このとき

$$E(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots\cdots+E(X_n)=$$

X_1，X_2，……，X_n は互いに独立であるから

$$V(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)=V(X_1)+V(X_2)+\cdots\cdots+V(X_n)=$$

したがって，標本平均 $\overline{X}$ の

期待値　$E(\overline{X})=E\left(\dfrac{X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n}{n}\right)=\qquad E(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)=\dfrac{1}{n}\cdot nm=m$

分散　$V(\overline{X})=V\left(\dfrac{X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n}{n}\right)=\qquad V(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)=\dfrac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2=\dfrac{\sigma^2}{n}$

標準偏差　$\sigma(\overline{X})=\sqrt{V(\overline{X})}=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

標本の抽出が非復元抽出の場合は，X_1，X_2，……，X_n は互いに独立ではない。しかし，母集団の大きさ N が標本の大きさ n に比べて十分大きい場合は，復元抽出と非復元抽出の違いは小さい。よって，非復元抽出による標本を，復元抽出による標本とみなすことができる。

以上より，次のことが成り立つ。

標本平均の期待値，分散，標準偏差

母平均 m，母分散 σ^2，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出するとき，その標本平均 $\overline{X}$ の

期待値 $E(\overline{X})=m$　　分散 $V(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$　　標準偏差 $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

例 母平均 60，母標準偏差 5 の母集団から，大きさ 9 の標本を無作為抽出するとき，その標本平均 $\overline{X}$ の

期待値 $E(\overline{X})=\quad$，　分散 $V(\overline{X})=\text{—}=\dfrac{25}{9}$，　標準偏差 $\sigma(\overline{X})=\quad=\dfrac{5}{3}$

要点 ② 標本平均の分布と正規分布

一般に，母集団がどのような分布であっても，次のことが成り立つことが知られている。

標本平均の分布

母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出するとき，

その標本平均 $\overline{X}$ の分布は，n が十分大きいとき，近似的に正規分布 $N\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。

例 母平均 60，母標準偏差 10 の母集団から，大きさ 100 の標本を無作為抽出するとき，その標本平均 $\overline{X}$ が 62 以上となる確率を求める。

標本平均 $\overline{X}$ の分布は近似的に $N\left(\quad,\quad\right)$，すなわち $N(60,\ 1^2)$ に従う。

$Z=\dfrac{\overline{X}-60}{1}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

よって，$P(\overline{X}\geqq 62)=P(Z\geqq 2)=0.5-0.4772=0.0228$

※母集団分布が正規分布のときは，標本の大きさ n に関係なく，標本平均 $\overline{X}$ の分布も正規分布に従う。

※標本の大きさ n を限りなく大きくしていくと，標本平均 $\overline{X}$ の標準偏差 $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ は限りなく 0 に近づき，$\overline{X}$ の分布は母平均 m の近くに限りなく集中する。つまり，標本平均 $\overline{X}$ は，標本の大きさ n を大きくしていくと，母平均 m に近づいていく。これを「大数の法則」という。

2 母平均 170, 母標準偏差 5 の母集団から，標本を無作為抽出し , その標本平均を $\overline{X}$ とする。

(1) 大きさ 16 の標本を抽出するとき，$\overline{X}$ の期待値，標準偏差を求めよ。

(2) 大きさ 100 の標本を抽出するとき，$\overline{X}$ が 169 以上 171 以下となる確率を求めよ。

Point Pickup

標本平均の期待値，標準偏差

母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出するとき，
その標本平均 $\overline{X}$ の

期待値 $E(\overline{X})=m$ 　　　標準偏差 $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

標本平均の分布

母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出するとき，
その標本平均 $\overline{X}$ の分布は，n が十分大きいとき，近似的に正規分布 $N\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。

第10講 PART2 確認問題

1 母平均58，母標準偏差10の母集団から，標本を無作為抽出し，その標本平均を $\overline{X}$ とするとき，次の問いに答えよ。

＜正規分布表＞

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852

(1) 大きさ25の標本を抽出するとき，$\overline{X}$ の期待値，標準偏差を求めよ。

$E(\overline{X})=$ [アイ]，$\sigma(\overline{X})=$ [ウ]

(2) 大きさ225の標本を抽出するとき，$\overline{X}$ が57.5以上58.5以下となる確率は [エ] である。

[エ] に当てはまるものを下の①～⑥のうちから選べ。

① 0.1915　② 0.2157　③ 0.2734

④ 0.3830　⑤ 0.4314　⑥ 0.5468

PART2 標本平均の分布

2 母平均 170, 母標準偏差 5 の母集団から，標本を無作為抽出し , その標本平均を $\overline{X}$ とする。

(1) 大きさ 16 の標本を抽出するとき，$\overline{X}$ の期待値，標準偏差を求めよ。

(2) 大きさ 100 の標本を抽出するとき，$\overline{X}$ が 169 以上 171 以下となる確率を求めよ。

[解答]

(1) $\overline{X}$ の期待値は $E(\overline{X})=170$，標準偏差は $\sigma(\overline{X})=\dfrac{5}{\sqrt{16}}=\dfrac{5}{4}$

(2) $\overline{X}$ の分布は近似的に正規分布 $N\left(170,\ \dfrac{5^2}{100}\right)$，すなわち $N\left(170,\ \dfrac{1}{4}\right)$ に従う。

$\dfrac{1}{4}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ より，$Z=\dfrac{\overline{X}-170}{\frac{1}{2}}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

よって，$P(169 \leqq \overline{X} \leqq 171)=P(-2 \leqq Z \leqq 2)=2P(0 \leqq Z \leqq 2)=2\cdot 0.4772=0.9544$

第10講　PART2 確認問題 解答

1

(1)　**[正解]** アイ：58，ウ：2

[解説]

$\overline{X}$ の期待値は $E(\overline{X})=58$　[A]

標準偏差は $\sigma(\overline{X})=\dfrac{10}{\sqrt{25}}=2$

[A]　母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出するとき，その標本平均 $\overline{X}$ の
期待値 $E(\overline{X})=m$
標準偏差 $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(2)　**[正解]** エ：⑥

[解説]

$\overline{X}$ の分布は近似的に正規分布 $N\left(58,\ \dfrac{10^2}{225}\right)$，

すなわち　正規分布 $N\left(58,\ \dfrac{4}{9}\right)$ に従う。[B]

$\dfrac{4}{9}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$ より，$Z=\dfrac{\overline{X}-58}{\frac{2}{3}}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

よって

$$P(57.5\leqq\overline{X}\leqq58.5)=P(-0.75\leqq Z\leqq0.75)$$
$$=2P(0\leqq Z\leqq0.75)$$
$$=2\cdot0.2734=\mathbf{0.5468}$$

[B]　母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出するとき，その標本平均 $\overline{X}$ の分布は，n が十分大きいとき，近似的に正規分布 $N\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。